

**Abiturprüfung**

**Analysis**

**Pflichtaufgaben**

Teil 2

**Eigene Aufgaben**

Datei: 71111

Start: 5. September 2012

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

[www.mathe-cd.de](http://www.mathe-cd.de)

## Übersicht über die Texte mit Abituraufgaben (allg. Gymnasium) aus Baden-Württemberg

### Analysis

- 70100** **Pflichtaufgaben Analysis**  
für die Jahrgänge 2006 bis 2014
- 70101** **Wahlaufgaben Analysis Teil 1**  
für die Jahrgänge 2006 bis 2010.
- 70102** **Wahlaufgaben Analysis Teil 2**  
für die Jahrgänge 2011 bis 2014

### Vektorgeometrie

- 70200** **Pflichtaufgaben Geometrie**  
für die Jahrgänge 2004 bis 2014
- 70201:** **Wahlaufgaben Analytische Geometrie – Teil 1**  
für die Jahrgänge 2000 bis 2010
- 70202:** **Wahlaufgaben Analytische Geometrie – Teil 2**  
für die Jahrgänge 2011 bis 2014

### Stochastik

- 70300** **Pflichtaufgaben und Wahlaufgaben Stochastik**  
für die Jahrgänge 2013 bis 2014

### Pflichtaufgaben

- 70001** In diesem Text stehen sämtliche Pflichtaufgaben (Analysis, Geometrie und Stochastik) der Jahrgänge 2004 bis 2014.  
Hierbei handelt es sich um eine reine Aufgabensammlung ohne Lösungen.

**Außerdem gibt es Spezialtexte, in denen Abituraufgaben nach Themen geordnet gesammelt sind.**

## Hinweise

Die deutschen Bundesländer ändern immer wieder Stil und Inhalt ihrer Abituraufgaben. Der Trend geht dahin, dass man die Prüfung in einen Pflichtteil und einen Wahlteil zerlegt. Im Pflichtteil werden fundamentale Rechenfähigkeiten abgefragt, die in der Regel auch ohne Hilfsmittel erledigt werden müssen. Im Wahlteil findet man dann eher noch den Aufgabenstil, den man seit Jahrzehnten kennt, also umfangreiche Aufgaben, die in die Tiefe gehen und möglichst anwendungsbezogen sind.

Durch den Trend, in der Schule immer leistungsfähigere Rechner zu verwenden (Grafikrechner, CAS-Rechner), verlieren Schüler ohnehin immer mehr die Fähigkeit und vor allem die Routine, grundlegende Aufgaben lösen zu können. Der unsanfte Druck, solche Aufgaben in Pflichtteilen ohne Hilfsmittel lösen zu müssen, ist hier ein gutes Mittel, Schüler dazu zu bringen, sich doch nicht zu sehr auf die neue Technik zu verlassen.

Wer in einem anderen Bundesland als BW seine Abiturprüfung ablegen will, der kann diese Sammlung an Pflichtaufgaben hervorragend zum Lernen und Wiederholen einsetzen. Was hier in kleine Einzelaufgaben zerlegt erscheint, tritt mit Sicherheit in jedem Bundesland in irgendeiner Form auf, entweder auf ähnliche Weise, oder in größeren Aufgaben als Bestandteil. So gesehen, sind kürzere Aufgaben zum Lernen und Vorbereiten eher noch geeigneter als umfangreichere Aufgaben, um einzelne Themen in den Griff (Kopf) zu bekommen.

Im Zuge der Einschränkungen der Inhalte muss man (leider) erwähnen, dass manche Funktionsarten nicht mehr verlangt werden. So fällt auch die Quotientenregel beim Ableiten in einigen Bundesländern weg. Ich werde hier diese Einschränkungen nicht machen. Ich gehe davon aus, dass jeder selbst weglassen kann, was er nicht benötigt. Und ich kann die Bundesländer nicht ausschließen, die mehr verlangen als andere. Also handle ich hier, so wie in meiner gesamten Sammlung meiner Internet-Bibliothek: Ich biete sehr viel mehr an, als der Einzelne benötigt. Jeder kann selbst auswählen.

Baden-Württemberg hat folgende Einteilung der Pflichtaufgaben für Analysis vorgenommen, die ich gerne übernehme, weil sie sehr gut gemacht ist:

**Aufgabe 1:** Ableitung einer Funktion.

**Aufgabe 2:** Integration bzw. Bildung einer Stammfunktion.

**Aufgabe 3:** Gleichungslehre

**Aufgabe 4:** Elemente der Kurvendiskussion - Funktionsuntersuchung

**Aufgabe 5:** Funktionenkompetenz

Hier findet man auch oft Schaubilder unbekannter Funktionen, aus denen man gewisse Antworten finden muss wie Zusammenhänge zwischen verschiedenen Funktionen und Verifizieren von Funktionseigenschaften

## Meine Sammlung an Pflichtaufgaben gliedert sich in viele Texte:

70001 Sammlung von Original-Pflichtaufgaben Analysis, Geometrie, Stochastik 2001 – 2014 aus Baden-Württemberg als reine Aufgabensammlung ohne Lösungen.

### Pflichtaufgaben Analysis

70100 Die Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

71111 Sammlung selbst erstellter ähnlicher Pflichtaufgaben

**Themenbereiche:** Aufgaben aus 71100 und 71111 zum gezielten Üben nur dieser Themen:

71121 Pflichtaufgaben zum Thema **Ableitungen**

71131 Pflichtaufgaben zum Thema **Integration, Stammfunktion**

71141 Pflichtaufgaben zum Thema **Gleichungslehre**

71151 Pflichtaufgaben zum Thema **Funktionsuntersuchung - Kurvendiskussion**

71161 Pflichtaufgaben zum Thema **Funktionenkomplexität**

71171 Pflichtaufgaben zum Thema **Definitionsbereiche**

71181 Pflichtaufgaben zum Thema **Extremwertsaufgaben**

### Pflichtaufgaben Vektorgeometrie

70200 Die Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

72111 Sammlung selbst erstellter ähnlicher Pflichtaufgaben

**Themenbereiche:** Aufgaben aus 71200 und 72111 zum gezielten Üben nur dieser Themen:

72121 Pflichtaufgaben zum Thema **Methoden der Geometrie**

72010 Zusammenstellung wichtiger Pflichtaufgaben zur Vektorgeometrie mit sehr ausführlichen Lösungen zum ausführlichen Training

### Pflichtaufgaben Stochastik

70300 Da es erst seit 2013 wieder Stochastik in der schriftlichen Abiturprüfung gibt, sammle ich hier sowohl Pflicht- wie auch Wahlaufgaben.

## Inhalt

### Teil 1: Aufgaben mit gemischten Funktionstypen

Musterjahrgang 1 – Gemischte Funktionen	6
Musterjahrgang 2 – Gemischte Funktionen	11
Musterjahrgang 3 – Gemischte Funktionen	16
Musterjahrgang 4 – Gemischte Funktionen	20
Musterjahrgang 5 – Gemischte Funktionen	24
Musterjahrgang 6 – Gemischte Funktionen	28
Musterjahrgang 7 – Gemischte Funktionen	32
Musterjahrgang 8 – Gemischte Funktionen	37
Musterjahrgang 9 – Gemischte Funktionen	41
Musterjahrgang 10 – Gemischte Funktionen	45

### Teil 2 - Nach Funktionstypen geordnet

Musterjahrgang 11 – Ganzrationale Funktionen (1)	50
Musterjahrgang 12 – Ganzrationale Funktionen (2)	53
Musterjahrgang 13 – Ganzrationale Funktionen (3)	59
Musterjahrgang 14 – Gebrochen rationale Funktionen (1)	64
Musterjahrgang 15 – Gebrochen rationale Funktionen (2)	68
Musterjahrgang 16 – Gebrochen rationale Funktionen (3)	72
Musterjahrgang 17 – Exponentialfunktionen (1)	76
Musterjahrgang 18 – Exponentialfunktionen (2)	79
Musterjahrgang 19 – Trigonometrische Funktionen (1)	83
Musterjahrgang 20 – Trigonometrische Funktionen (2)	87

## Musterjahrgang 1 - Analysis

### M1-A1 Ableiten

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{x^3 - 4x + 1}{2x}$  und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

### M1-A2 Integration

Berechnen Sie das Integral  $\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(x \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right) dx$ .

### M1-A3 Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung  $\sqrt{x^2 + 1} = 1 - x$ .

### M1-A4 Funktionsuntersuchung

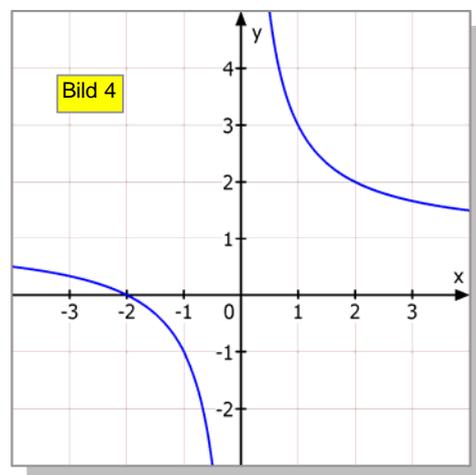
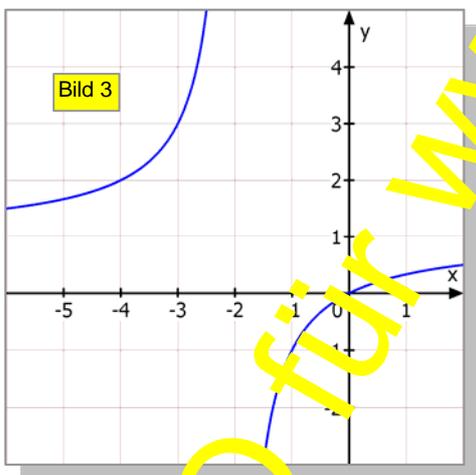
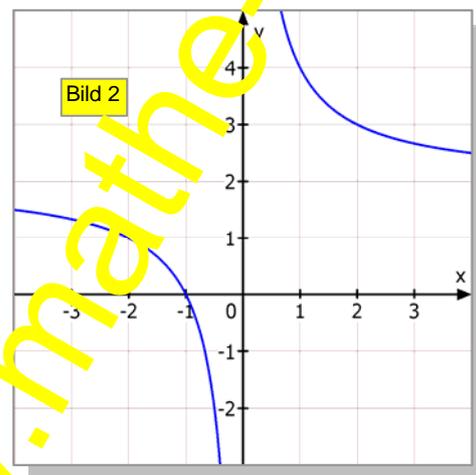
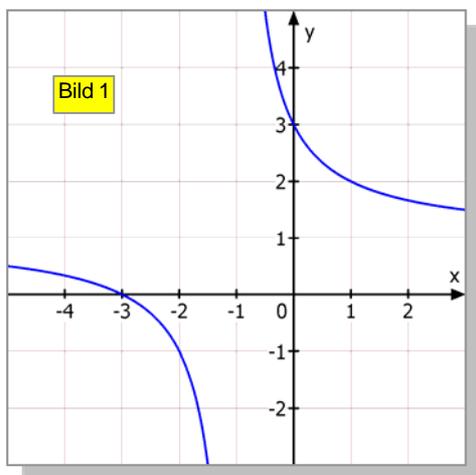
Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{x+1} - 2$ . Ihr Schaubild sei  $K$ .

- Geben Sie die Asymptoten von  $K$  an.
- Wo schneidet  $K$  die  $x$ -Achse?
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, welche die Steigung 1 hat.

### M1-A5 Funktionenkompetenz

Gegeben sind die Funktionen  $f$  durch  $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$  und  $g$  durch  $g(x) = x + 1$

- a) Geben Sie die Gleichungen der Funktionen  $k_1$  mit  $k_1(x) = g(f(x))$  und  $k_2$  mit  $k_2(x) = f(g(x))$  an.
- b) Es sei  $k_3$  die Funktion  $k_3(x) = \frac{1}{f(x)}$ . Ordne den Funktionen  $f$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$  ihre Schaubilder zu, die durch die folgenden Abbildungen dargestellt werden.



## Lösungen

### M1-A1 Ableiten

Gegeben:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 1}{2x}$$

Zerlegen in Einzelbrüche:

$$f(x) = \frac{x^3}{2x} - \frac{4x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}x^2 - 2 + \frac{1}{2}x^{-1}$$

Ableitung:

$$f'(x) = x - \frac{1}{2}x^{-2} = x - \frac{1}{2x^2}$$

Zusammenfassen:

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 1}{2x^2}$$

### M1-A2 Integration

Gesucht:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \left( x \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) \right) dx$$

Man wendet die Methode der **Substitution zur Vereinfachung** des Integrals an:

Substitution:

$$u = \frac{1}{2}x^2$$

Differenzial:

$$du = x \cdot dx \Leftrightarrow du = x \cdot dx$$

Also ersetzt man  $\frac{1}{2}x^2$  durch  $u$  und  $x \cdot dx$  durch  $du$ . Notwendig ist noch die Umrechnung der Grenzen:

$$x_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$$

$$x_2 = \sqrt{\pi} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \left( x \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(u) du = \left[ \sin(u) \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

### M1-A3 Gleichungen

Gegeben:

$$\sqrt{x^2 + 4} = 1 - x$$

Quadrieren:

$$x^2 + 4 = (1 - x)^2$$

Binomische Formel anwenden:

$$x^2 + 4 = 1 - 2x + x^2 \quad | -x^2$$

$$4 = 1 - 2x \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

Bei Wurzelgleichungen, MUSS die Probe gemacht werden:

$$\text{Linke Seite: } LS = \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Rechte Seite: } RS = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

Lösungsmenge:

$$L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

## M1-A4 Funktionsuntersuchung

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{x+1} - 2$ . Ihr Schaubild sei  $K$ .

- Geben Sie die Asymptoten von  $K$  an.
- Wo schneidet  $K$  die  $x$ -Achse?
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente, welche die Steigung 1 hat.

### Lösung

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x+1}) - 2 = -2$ , denn  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Also ist  $y = -2$  die waagrechte Asymptote für  $x \rightarrow -\infty$ .

Weitere Asymptoten gibt es nicht.

b) Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse:  $e^{x+1} - 2 = 0$   
 $e^{x+1} = 2$   
 $x + 1 = \ln 2$   
 $x_N = \ln 2 - 1$ .

c) Ableitung:  $f'(x) = e^{x+1}$   
 Bedingung:  $f'(x) = 1$ , d. h.  $e^{x+1} = 1$   
 Wegen  $e^0 = 1$ :  $x + 1 = 0$

Also ist für  $x = -1$  die Tangentensteigung 1.

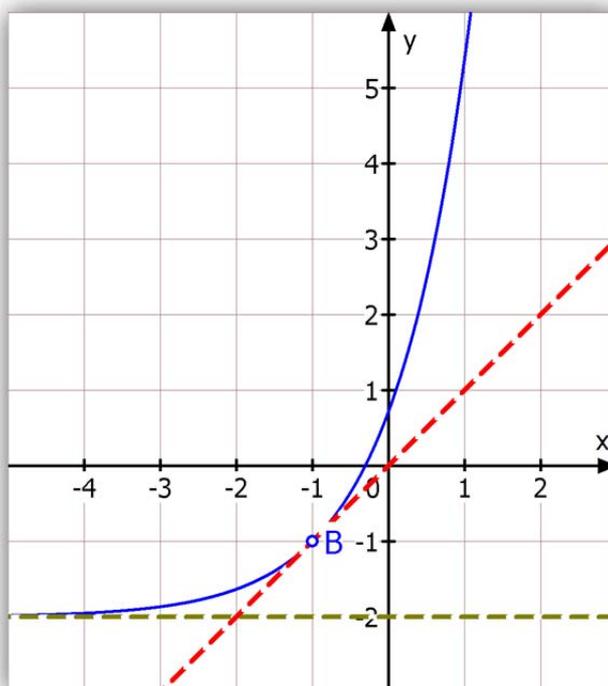
$y$ -Koordinate des Berührungspunkts:  $f(-1) = e^{-1+1} - 2 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$

Berührungspunkt:  $B(-1 | -1)$

Tangente mit der Punkt-Steigungsform:

$y - y_B = m_T(x - x_B)$ :  $y + 1 = 1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y = x$ .

Die Abbildung war für die Prüfung nicht verlangt.



## M1-A5 Funktionenkompetenz

Gegeben sind die Funktionen  $f$  durch  $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$  und  $g$  durch  $g(x) = x + 1$

$$a) \quad k_1(x) = g(f(x)) = \left(1 + \frac{2}{x}\right) + 1 = 2 + \frac{2}{x} = \frac{2+2x}{x} = 2 \frac{x+1}{x}$$

$$k_2(x) = f(g(x)) = 1 + \frac{2}{x+1} = \frac{x+1+2}{x+1} = \frac{x+3}{x+1}$$

$$(b) \quad f(x) = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$$

$$k_3(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{x+2}{x}} = \frac{x}{x+2}$$

Merkmale können beispielsweise die Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse sein:

$$k_1: x_N = -1, \quad k_2: x_N = -3, \quad f: x_N = -2 \quad \text{und} \quad k_3: x_N = 0$$

Eine weitere Möglichkeit zur Identifizierung bieten die Asymptoten:

$$K_1: x = 0 \quad \text{und} \quad y = 2. \quad K_2: x = -1 \quad \text{und} \quad y = 1. \quad K_3: x = -2 \quad \text{und} \quad y = 1. \quad K_f: x = 0 \quad \text{und} \quad y = 1.$$

